Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

R 184

Bepaling van de Druk in een Put als Functie van de Tijd in het Geval van Radiale Verandering van de Permeabiliteit

J.A. Zonneveld

1952

Bepaling van de druk in een put als functie van de tijd in het geval van radiale verandering van de permeabiliteit.

1. Inleiding.

In opdracht van de Geologische Afdeling van de Bataafse Petroleum Maatschappij den Haag, werden berekeningen uitgevoerd ter bepaling van de druk in een put als functie van de tijd in het geval van radiale verandering van de permeabiliteit. Het probleem was het volgende:

Men beschouwt een oneindige laag, waarin een put met straal r_w de permeabiliteit in een cylindrisch gebied met straal r_o zij k_1; de permeabiliteit erbuiten zij k_2. Verder zij de productie van de put constant. r_w/r_o wordt klein aangenomen. Gevraagd werd de drukval in de put als functie van T en $\frac{k_1}{k_2}$.

2. Mathematische behandeling.

Het probleem gesteld in de vorige paragraaf werd behandeld volgens een manuscript van Dr P. Hazebroek.

Als $\frac{r_w}{r_o}$ klein is kan een lijnvormige put worden aangenomen. Voor de drukval geldt dan in de twee gebieden:

$$\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial P_i}{\partial r}\right)=\frac{1}{K_i}\ \frac{\partial P_i}{\partial T}\quad i = 1,2 \tag{2.1}$$

waarbij $K_i = \frac{k_i}{f\mu c}$ met f = poreusheid
μ = viscositeit
c = compressibiliteit.

De begin- en randvoorwaarden zijn:

$$\left.\begin{aligned} &P_i = 0 \text{ voor } T = 0\\ &P_1 = P_2 \text{ voor } r = r_o\\ &k_1\ \frac{\partial P_1}{\partial r} = k_2\ \frac{\partial P_2}{\partial r}\text{ , } r = r_o \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$P_2(\infty)= 0 \tag{2.3}$$

De constante productie geeft de voorwaarde

$$\lim_{r \to 0}\ r\ \frac{\partial P_1}{\partial r} = -1\ . \tag{2.4}$$

Ingevoerd worden dimensiloze grootheden

$$\frac{K_1 T}{r_0^2} = t;\ \frac{r}{r_o} = R\ ,\ \frac{r_w}{r_o} = \rho\ \cdot\ \frac{k_1}{k_2} = \lambda^2 \tag{2.5}$$

Na Laplace transformatie worden de vergelijkingen en beginvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial P_1^x}{\partial R}\right) &= p\,P_1^x \\ \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial P_2^x}{\partial R}\right) &= \lambda^2\,p\,P_2^x \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned} P_1^x &= P_2^x \\ \lambda^2\frac{\partial P_1^x}{\partial R} &= \frac{\partial P_2^x}{\partial R} \end{aligned}\right\} \quad R = 1 \qquad (2.7)$$

$$\lim_{R\to 0} R\frac{\partial P_1^x}{\partial R} = -\frac{1}{p} \qquad (2.8)$$

$$P_2^x(\infty) = 0 \qquad (2.9)$$

Oplossingen van het stelsel (2.6) zijn:

$$P_1^x = \frac{1}{p}\left(K_o(qR) + A\,I_o(qR)\right) \qquad (2.10)$$

$$P_2^x = \frac{B}{p}\left(K_o(\lambda q R)\right) \qquad (2.11)$$

met $\sqrt{p} = q$.

De coefficienten A en B volgen uit (2.7):

$$K_o(q) + A\,I_o(q) = B\,K_o(\lambda q)$$

$$\lambda\left\{K_1(q) - A\,I_1(q)\right\} = B\,K_1(\lambda q)$$

waaruit

$$A(q) = \frac{\lambda K_1(q)K_o(\lambda q) - K_o(q)K_1(\lambda q)}{\lambda I_1(q)K_o(\lambda q) + I_o(q)K_1(\lambda q)} \qquad (2.12)$$

Voor de getransformeerde drukval in de put ($R=\rho$) vindt men:

$$P_w^x = \frac{K_o(\rho q)}{p} + \frac{I_o(\rho q)}{p}\,\frac{\lambda K_1(q)K_o(\lambda q) - K_o(q)K_1(\lambda q)}{\lambda I_1(q)K_o(\lambda q) + I_o(q)K_1(\lambda q)} \qquad (2.13)$$

Daar ρ klein verondersteld is wordt $I_o(\rho q) = 1$ gesteld.

3. De terug transformatie van P_w^x.

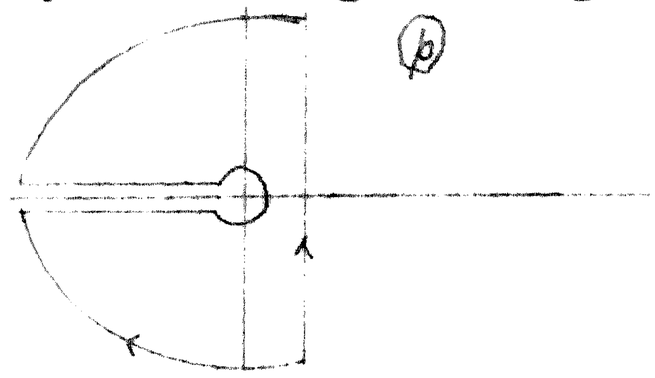
$$\frac{K_o(\rho q)}{p} \doteq -\frac{1}{2}\,E1\left(-\frac{\rho^2}{4t}\right) \qquad (3.1)$$

Stel $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} A(q)\, e^{pt}\, \frac{dp}{p}$. (3.2)

dan is:

$$P_{II} = -\frac{1}{2}\, E_1\left(-\frac{\rho^2}{4t}\right) + \Phi(t). \qquad (3.3)$$

De integrand van $\Phi(t)$ heeft een logarithmische singulariteit in 0. Daarom wordt een snede aangebracht in het p-vlak langs de negatieve reële as. De integratieweg wordt dan verlegd zoals in de figuur aangegeven. De nulpunten van de noemer van A(q) liggen in het q-vlak links van de imaginaire as. Daar het gebied binnen de in het p-vlak getekende contour rechts van de imaginaire as in het q-vlak komt leveren de polen van A(q) dus geen bijdrage.



Volgens Hazebroek is dan: $\Phi(t) = \frac{1}{2}(\lambda^2-1)\ln t - (1-\lambda^2)(\ln 2 - \frac{1}{2} C) +$
$- \lambda^2 \ln\lambda + \Psi(t)$ (3.4)

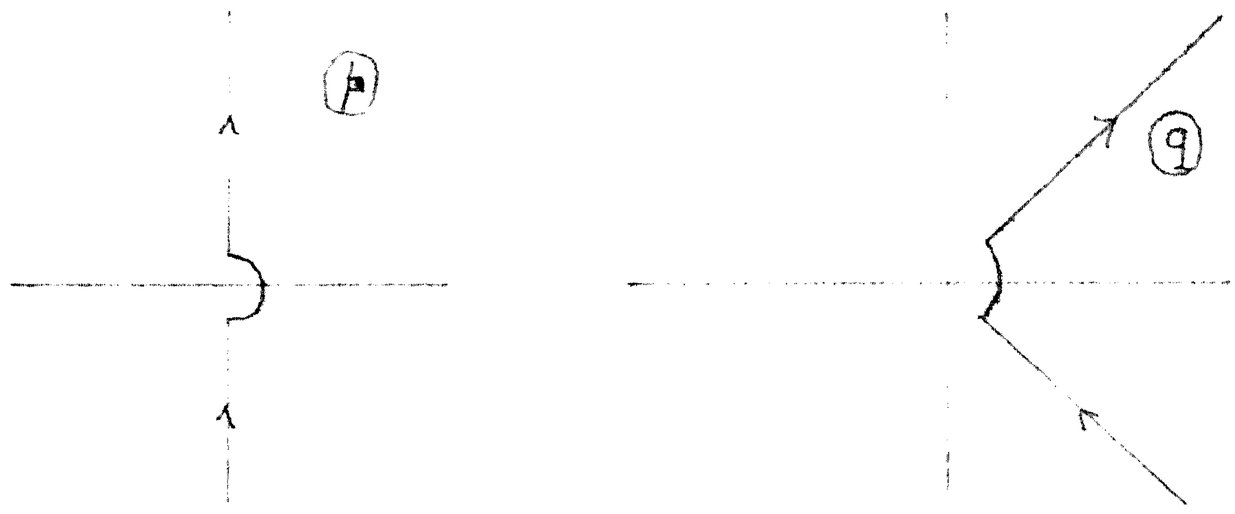
waarbij C de constante van Euler is,

en $\Psi(t) = \int_0^\infty \left\{ \mathrm{Re}\, \frac{A(i\sqrt{u})}{\pi i} + \frac{1}{2}(\lambda^2-1) \right\} e^{-ut}\, \frac{du}{u}$. (3.5)

4. De Mellin-integraal.

Een andere mogelijkheid om $\Phi(t)$ te bepalen is direct de Mellin-integraal uitrekenen.

Daartoe wordt de integratieweg gelegd langs de imaginaire as in het p-vlak, met een cirkelboog om 0 of volgens de getekende weg in het q-vlak.



De berekening van A(q) langs deze weg is mogelijk nadat de I en K functies herleid zijn tot J en Y functies die voor complexe argumenten getabelleerd zijn. Voor de straal R van de cirkelboog moeten geschikte waarden gekozen worden; in dit geval werd R = 3 gekozen.

$$A(q) = \frac{\frac{\pi i}{4}\left[\lambda\{J_0(i\lambda q)+i\,Y_0(i\lambda q)\}\{J_1(iq)+i\,Y_1(iq)\}+\{J_0(iq)+iY_0(iq)\}\right.}{\frac{\pi}{2}\left[\lambda J_1(iq)\{J_0(i\lambda q)+i\,Y_0(i\lambda q)\} - J_0(iq)\{J_1(i\lambda q)+i\,Y_1(i\lambda q)\}\right]}$$
$$\left.\{J_1(i\lambda q)+ i\,Y_1(i\lambda q)\}\right. \qquad (4.1)$$

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \mathrm{Re}\left\{ A(\bar{q}) e^{\bar{q}^2 t} \right\} d\varphi + \int_R^{\infty} \mathrm{Re}\left\{ i\, A(\bar{q}^{\times})\, e^{\bar{q}^{\times 2} t} \right\} \frac{dr}{r} \right] \qquad (4.2)$$

$$\bar{q} = Re^{-i\varphi} \quad , \quad \bar{q}^{\times} = re^{-\frac{i\pi}{4}} .$$

5. <u>Een benadering van $\bar{\Phi}(t)$</u>.

Een benadering voor $\bar{\Phi}(t)$ vindt men als volgt:

$$A(q) = \frac{\lambda K_1(q)K_0(\lambda q) - K_0(q)K_1(\lambda q)}{\lambda J_1(q)K_0(\lambda q) + J_0(q)K_1(\lambda q)} = \frac{\lambda K_1(q)K_0(\lambda q) - K_0(q)K_1(\lambda q)}{N} \qquad (5.1)$$

$\frac{1}{N}$ wordt ontwikkeld in een machtreeks naar q. Daarna transformeert men de teller x de machtreeks termsgewijs terug.

$$\frac{1}{N} = \lambda q - \frac{\lambda q^3}{4}(1-\lambda^2) + O(q^3 \log q). \qquad (5.2)$$

$$\frac{1}{q^3 N} = \frac{\lambda}{p} - \frac{\lambda}{4}(1-\lambda^2) + O(\log p). \qquad (5.3)$$

$$q\left\{ \lambda K_1(q)\, K_0(\lambda q) - K_0(q)\, K_1(\lambda q) \right\} \doteq (\lambda^2-1)\, \frac{e^{-\frac{\lambda^2+1}{4t}}}{4\, t^2}\, K_1\left(\frac{\lambda}{2t}\right) \qquad (5.4)$$

$$\therefore \frac{A(q)}{p} \doteq \lambda(\lambda^2-1) \int_0^t \frac{e^{-\frac{\lambda^2+1}{4\tau}}}{4\,\tau^2} K_1\left(\frac{\lambda}{2\tau}\right) d\tau + \frac{\lambda(\lambda^2-1)^2}{16\, t^2}\, e^{-\frac{\lambda^2+1}{4t}}\, K_1\left(\frac{\lambda}{2t}\right) +$$

$$+ \text{ hogere termen} \qquad (5.5)$$

De integraal wordt als wolgt geschat

$$\lambda(\lambda^2-1) \int_0^t \frac{e^{-\frac{\lambda^2+1}{4\tau}}}{4\,\tau^2} K_1\left(\frac{\lambda}{2\tau}\right) d\tau = \frac{\lambda(\lambda^2-1)}{\lambda^2+1} \int_{\frac{\lambda^2+1}{4t}}^{\infty} e^{-u} K_1\left(\frac{2\lambda u}{\lambda^2+1}\right) du =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\lambda^2-1) \int_{\frac{\lambda^2+1}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du + \frac{\lambda(\lambda^2-1)}{\lambda^2+1} \int_{\frac{\lambda^2+1}{4t}}^{\infty} e^{-u} \left\{ K_1\left(\frac{2\lambda u}{\lambda^2+1}\right) - \frac{\lambda^2+1}{2\lambda u} \right\} du =$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\lambda^2-1)\, Ei\left(-\frac{\lambda^2+1}{4t}\right) + \text{rest}. \qquad (5.6)$$

De rest is kleiner dan $\frac{\lambda(\lambda^2-1)}{\lambda^2+1} \int_0^{\infty} e^{-u} \left\{ K_1\left(\frac{2\lambda u}{\lambda^2+1}\right) - \frac{\lambda^2+1}{2\lambda u} \right\} du =$

$$= \tfrac{1}{2}(\lambda^2-1) \int_0^{\infty} e^{-au} \left(K_1(u) - \frac{1}{u} \right) du =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\lambda^2-1)\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\ln(a-\sqrt{a^2-1})+\ln 2a\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\lambda^2-1)\ln(\lambda^2+1)-\lambda^2\ln\lambda\ . \qquad (5.7)$$

De tweede term van het rechterlid van (5.5) wordt benaderd door

$$\frac{(\lambda^2-1)^2}{8t}\ . \qquad (5.8)$$

Voor $\Phi(t)$ vindt men bij benadering:

$$\Phi(t) = -\frac{1}{2}(\lambda^2-1)\mathrm{Ei}\left(-\frac{\lambda^2+1}{4t}\right)+\frac{1}{2}(\lambda^2-1)\ln(\lambda^2+1)-\lambda^2\ln\lambda+\frac{(\lambda^2-1)^2}{8t}$$

Voor grote t is dit goed te gebruiken. (5.9)

6. De berekeningen.

Uitgegaan werd van de volgende, door Hazebroek, verstrekte numerieke gegevens.

$t \geqslant 0{,}1$
$\lambda = 0{,}2$ en $0{,}5$
$\frac{k_1}{\mu} = 0{,}00074$

$$\Delta p = \frac{q.\mu}{2\pi k_1 h}\log\frac{r_o}{r_w} = 100 \text{ atm.}$$

p = laagdikte = 1500 cm.
q = productiesnelheid = 100 ^{cc}/sec.
$f = 0{,}25$
$c = 10^{-4}$ atm^{-1}.

Met deze gegevens werd P_w berekend. Opgegeven worden in de volgende paragraaf $\Phi(t)$, berekend met (3.5), de benaderde $\Phi(t)$ berekend met (5.9), en de daaruit volgende P_w.

Voor $\lambda = 0{,}2$ en $t = 1$ werd voor contrôle de Mellin-integraal volgens paragraaf 5 uitgerekend. Dit gaf dezelfde uitkomst als (3.5).

7. De resultaten, afhankelijk van t, de volgens 2.5) getransformeerde tijd.

De berekeningen werden uitgevoerd door Mej. R.D.M. Mulder.

$\lambda = 0,2$

t	$-\frac{1}{2}Ei(\frac{-\rho^2}{4\tau})$	Φ (t)	ben.Φ(t)	P_w	ben.P_w
0,1	6,228	- 0,000	0,035	6,228	6,263
0,2	6,574	- 0,004	- 0,019	6,570	6,555
0,4	7,032	- 0,103	- 0,212	6,929	6,820
1,0	7,379	- 0,345	- 0,441	7,034	6,938
2,0	7,725	- 0,663	- 0,712	7,062	7,013
4,0	8,072	- 0,992	- 1,020	7,080	7,052
10,0	8,530	- 1,430	- 1,442	7,100	7,088
100,0	9,682	- 2,535	- 2,535	7,147	7,147

$\lambda = 0,5$

		Φ t)	ben.Φ(t)	P_w	ben.P_w
0,1		- 0,000	0,085	6,228	6,313
0,2		- 0,002	0,055	6,572	6,629
0,4		- 0,056	- 0,072	6,976	6.960
1,0		- 0,201	- 0,239	7,178	7,140
2,0		- 0,419	- 0,445	7,306	7,279
4,0		- 0,663	- 0,680	7,409	7,392
10,0		- 0,998	- 1,005	7,532	7,525
100,0		- 1,857	- 1,858	7,825	7,824